M2 Physique Macroscopique et Complexité
M2 Physique Quantique
Physique Statistique

TD 3 : Marches aléatoires discrètes

A. Premiers résultats

On se propose dans cette première partie d'établir quelques propriétés de marches aléatoires discrètes (temps discret + évolution sur réseaux discrets) à l'aide d'arguments élémentaires (i.e. sans faire appel au formalisme des fonctions génératrices).

I. Probabilité de retour d'une marche biaisée en dimension un

On considère une marche aléatoire unidimensionnelle biaisée, avec probabilité de saut sur le site de droite égale à p et probabilité de saut sur le site de gauche égale à $q = 1 - p$.

En partitionnant sur le nombre de visites d'un site plus proche voisin du site de départ avant le retour au site de départ, calculer la probabilité de retour de cette marche aléatoire. Que devient cette expression dans le cas d'une marche symétrique ?

II. Temps de sortie d'un intervalle d'une marche aléatoire biaisée 1D

On considère une marche aléatoire unidimensionnelle biaisée, avec probabilité de saut sur le site de droite égale à p et probabilité de saut sur le site de gauche égale à $q = 1-p$. Ce marcheur aléatoire est introduit à l'instant initial en un site l intérieur au segment $[0, N]$, i.e. $0 < l < N$. On suppose que le marcheur est tué dès qu'il atteint une des extrémités 0 ou N, et on note $T(l)$ la variable aléatoire associée au temps de vie du marcheur.

1. En partitionnant sur la première étape de la marche aléatoire, écrire une équation aux différences vérifiée par la probabilité $P(T(l) = n)$.

2. En déduire une équation vérifiée par le premier moment du temps de vie $\langle T(l) \rangle$, dont on précisera les conditions aux limites.

3. Résoudre l'équation précédente. Que devient l'expression trouvée dans le cas d'une marche symétrique ?

B. Introduction au formalisme des fonctions génératrices

I. Fonctions génératrices $P(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0}; \xi)$ et $F(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0}; \xi)$

On définit pour une marche aléatoire en temps discret les probabilités suivantes :

– $P_n(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0})$: probabilité d'être au site $\mathbf{s}$ après n sauts, sachant que la marche a commencé au site $\mathbf{s_0}$;
– $F_n(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0})$: probabilité d'être au site $\mathbf{s}$ *pour la première fois* à l'étape n de la marche, sachant que cette marche a commencé au site $\mathbf{s_0}$.

On définit également les fonctions génératrices associées par :

$$P(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0}; \xi) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0})\xi^n, \quad \text{et} \quad F(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0}; \xi) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0})\xi^n.$$

On adoptera par la suite la convention : $P_0(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0}) = \delta_{\mathbf{s}\mathbf{s_0}}$ et $F_0(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0}) = 0$.

1. Quelles sont les éventuelles relations de normalisation vérifiées par les probabilités $P_n(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0})$ et $F_n(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0})$?

2. En partitionnant sur l'instant de première visite du site $\mathbf{s}$, écrire une relation entre les $P_n(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0})$ et les $F_n(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0})$.

3. En déduire la fonction génératrice $F(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0}; \xi)$ en fonction de $P(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0}; \xi)$.

II. Caractérisation des marches aléatoires récurrentes

Énoncer une condition nécessaire et suffisante mettant en jeu la fonction génératrice $P(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0}; \xi)$ pour que la probabilité de retour au site de départ $\mathbf{s_0}$ de la marche soit 1.

III. Nombre moyen de retours en un site donné

Montrer que $P(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0}; 1^-)$ représente le nombre moyen de fois où la marche aléatoire issue du site $\mathbf{s_0}$ visite le site $\mathbf{s}$.

En particulier, que dire du nombre moyen de retours au site de départ $\mathbf{s_0}$ d'une marche récurrente ? D'une marche non récurrente ?

IV. Temps moyens conditionnels de premier passage

On définit $\tau(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0})$ comme le nombre moyen d'étapes jusqu'à la première visite du site $\mathbf{s}$ d'une marche issue du site $\mathbf{s_0}$, sachant que le site $\mathbf{s}$ est effectivement atteint au cours de la marche.

Exprimer $\tau(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0})$ en fonction de la fonction génératrice $F(\mathbf{s} \mid \mathbf{s_0}; \xi)$.

V. Application au cas de la marche aléatoire biaisée unidimensionnelle

On considère une marche aléatoire unidimensionnelle biaisée, avec probabilité de saut sur le site de droite égale à p et probabilité de saut sur le site de gauche égale à $q = 1 - p$.

Calculer pour cette marche les fonctions génératrices $P(\mathbf{s_0} \mid \mathbf{s_0}; \xi)$ et $F(\mathbf{s_0} \mid \mathbf{s_0}; \xi)$. En déduire :
– la probabilité de retour au site $\mathbf{s_0}$ $R(\mathbf{s_0} \mid \mathbf{s_0})$;
– le nombre moyen de retours au site de départ $\mathbf{s_0}$;
– le temps moyen conditionnel de premier retour $\tau(\mathbf{s_0} \mid \mathbf{s_0})$.

C. Marches aléatoires invariantes par translation

On se propose dans cette partie d'appliquer le formalisme général développé dans la partie précédente au cas particulier des marches aléatoires discrètes invariantes par translation.

On notera $P_n(\mathbf{l})$ la probabilité pour que la position du marcheur aléatoire après n étapes soit $\mathbf{l}$, sachant que ce marcheur aléatoire était initialement en $\mathbf{0}$, et $p(\mathbf{l}-\mathbf{l}')$ la probabilité de saut élémentaire du site $\mathbf{l}'$ vers le site $\mathbf{l}$.

Par ailleurs, on adoptera la condition initiale $P_0(\mathbf{l}) = \delta_{\mathbf{l}\mathbf{0}}$.

I.Transformée de Fourier discrète et facteur de structure

1. Ecrire une relation de récurrence reliant P_{n+1} à P_n.

2. En introduisant les transformées de Fourier discrètes :

$$\widetilde{P}_n(\mathbf{k}) \equiv \sum_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{k}} P_n(\mathbf{l}) \tag{1}$$

et

$$\lambda(\mathbf{k}) \equiv \sum_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{k}} p(\mathbf{l}), \tag{2}$$

(cette dernière TF est couramment appelée "facteur de structure de la marche aléatoire"), calculer $\widetilde{P}_n(\mathbf{k})$.

Par TF inverse, en déduire $P_n(\mathbf{l})$.

3. Déduire de la question précédente une représentation intégrale de la fonction génératrice

$$P(\mathbf{l};\xi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mathbf{l})\xi^n. \tag{3}$$

II. Marche aléatoire biaisée unidimensionnelle

On considère une marche aléatoire unidimensionnelle biaisée, avec probabilité de saut sur le site de droite égale à p et probabilité de saut sur le site de gauche égale à $q = 1-p$.

Calculer la fonction génératrice $P(\mathbf{l};\xi)$, puis la fonction génératrice des probabilités de premier passage

$$F(\mathbf{l};\xi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\mathbf{l})\xi^n. \tag{4}$$

En déduire la probabilité de visiter un jour un point quelconque du réseau.

III.Théorème de Pólya

On considère une marche aléatoire isotrope d-dimensionnelle avec sauts sur les plus proches voisins ("marche aléatoire de Pólya").

1. En utilisant la représentation intégrale des fonctions de Bessel modifiées d'indice entier n suivante :

$$I_n(z) = I_{-n}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{z\cos\theta}\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{5}$$

montrer que la fonction génératrice $P(\mathbf{l};\xi)$ admet la représentation intégrale suivante :

$$P(\mathbf{l};\xi) = \int_0^{\infty} e^{-t}\prod_{j=1}^{d} I_{|l_j|}(t\xi/d)\mathrm{d}t, \tag{6}$$

où l_j désigne la j^e composante du vecteur $\mathbf{l}$.

2. Connaissant le développement asymptotique

$$I_n(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left\{1 - \frac{4n^2-1}{8z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)\right\} \quad \text{quand} \quad z \to \infty, \tag{7}$$

déduire de la question précédente que si $d = 1$ ou 2, la marche est récurrente, alors que si $d \geq 3$, la marche ne l'est pas ("théorème de Pólya").